דיאנה נפטלייב

311955827

**אלגוריתמים – ממ"ן 11**

**שאלה 1:**

רעיון כללי:

נשתמש באלגוריתם של גייל ושאפלי לפתרון בעיית הזיווג היציב, כדי לזווג כל ספינה אל הנמל שבו תיעצר במהלך מסלולה. הספינות מקבילות לגברים בבעיית הזיווג היציב, והנמלים מקבילים לנשים. רשימת ההעדפות של כל ספינה תהיה מורכבת מהנמלים במסלול המתוכנן שלה לפי סדר הופעתם, בעוד שרשימת ההעדפות של כל נמל תהיה רשימת הספינות המגיעות אליו בסדר הפוך (כלומר, הספינה שמגיעה אחרונה לנמל תהיה בעדיפות הכי גבוהה). בנייה זו של רשימות ההעדפות תאפשר עמידה בתנאי שלא יעגנו שתי ספינות באותו נמל.

תיאור האלגוריתם:

1. בניית רשימת ההעדפות של כל ספינה:

עבור כל ספינה s מתוך n הספינות, נעבור על לוח הזמנים שלה ונוסיף כל נמלp שהיא אמורה להגיע אליו לרשימת ההעדפות בסדר עדיפות יורד.

1. בניית רשימת ההעדפות של כל נמל:

* עבור כל יום i מתוך m הימים בחודש, נבצע בסדר יורד (מהיום האחרון עד ליום הראשון):
* נעבור על לוח הזמנים של כל ספינה s מתוך n הספינות ונבדוק האם הספינה ה- s עוגנת בנמל p כלשהו באותו יום.
* אם כן – נוסיף את הספינה ה- s לרשימת ההעדפות של נמל p בסדר יורד (כך שהספינה שהוספנו נמצאת בעדיפות האחרונה ברשימה).
* אם לא – נמשיך לבדיקת לוח הזמנים של הספינה הבאה בתור.

1. הפעלת אלגוריתם גייל-שאפלי לזיווג כל ספינה לנמל שבו תעגון, כאשר הספינות מקבלות את תפקיד הגברים והנמלים את תפקיד הנשים:

הוכחת נכונות:

נכונות אלגוריתם גייל-שאפלי מוכחת בספר הלימוד. הבעיה הנתונה מתאימה לתנאים של האלגוריתם:

* קיימים n נמלים ו- n ספינות, כך שניתן ליצור n זוגות שבהם כל ספינה וכל נמל מופיעים פעם אחת.
* לוח הזמנים של כל ספינה כולל כל נמל פעם אחת בדיוק (נתון בשאלה), ולכן רשימת ההעדפות של כל ספינה כוללת דירוג של כל n הנמלים.
* מכיוון שכל ספינה מבקרת בכל הנמלים, ושתי ספינת לא מבקרות באותו נמל באותו יום, רשימת העדיפויות של כל נמל כוללת דירוג של כל n הספינות.

נראה כי לא ייתכן מצב שבו תגיע ספינה לנמל שספינה אחרת כבר עוגנת בו:

נניח בשלילה שספינה s עוגנת בנמל p לאחר שהגיעה אליו ביום d, ולאחר מכן ביום p, כך ש- p > d, מגיעה ספינה נוספת s’ לאותו נמל.

מכך נובע ש- s’ הייתה בעדיפות גבוהה יותר ברשימת ההעדפות של נמל p, ולכן בעת בניית רשימת הצימודים של כל נמל לספינה באמצעות אלגוריתם הזיווג היציב, נמל p היה צריך להיות מצומד לספינה s’, וזאת בניגוד להנחה שהאלגוריתם קבע שהספינה s תעגון בנמל p.

סיבוכיות:

בניית רשימות ההעדפות של הספינות:

בניית רשימות ההעדפות של הנמלים:

ריצת אלגוריתם הזיווג היציב (מהספר):

נתון כי m>n, ולכן סיבוכיות זמן הריצה הכללית היא:

**שאלה 2:**

רעיון כללי:

בכל רכיב קשיר בגרף, כדי שניתן יהיה לכוון צלע לכל אחד מ- n הקודקודים, מספר הקודקודים חייב להיות גדול מ-2 ומספר הצלעות חייב להיות לפחות n. כלומר, כל רכיב קשיר בגרף צריך להכיל מעגל.

נשתמש באלגוריתם DFS כדי לבדוק האם קיים מעגל בכל רכיב קשיר, ואם כן, נעבור על הגרף באופן דומה ל- BFS תוך הכוונת הקשתות.

פירוט:

* נריץ סריקת DFS מקודקוד כלשהו s ונבנה גרף T המסווג את סוגי הקשתות בגרף.
* אם ב- T לא קיימות קשתות אחורה -> אין מעגל -> לא ניתן לכוון צלעות כנדרש.
* אחרת, נמצאה ב- T לפחות קשת אחורה אחת. נניח כי קשת זו נמצאה בעת סריקת קודקוד v והיא מקשרת אותו לקודקוד u שכבר נסרק. נכוון קשת זו בכיוון (u,v).
* נבצע סריקת BFS על T החל מקודקוד v, ונכוון כל קשת שאנו מוצאים "קדימה" – כלומר, מ-V לכיוון השכנים של v, לאחר מכן מהשכנים ברמה 1 לשכנים ברמה 2 וכן הלאה.

סריקת BFS מייצרת מבנה עץ המכיל את כל הקודקודים ברכיב הקשיר והשורש שלו הוא v, כך שלכל קודקוד שאינו v ישנה קשת המצביעה אליו מכיוון קודקוד האב שלו בעץ.

סיבוכיות:

ריצת DFS:

ריצת BFS:

בסה"כ: